

Proiezioni ortogonali

MODULO

Prerequisiti:	Avere buona predisposizione alla immaginazione di processi spaziali.
Obiettivi:	<ul style="list-style-type: none">a) Acquisire familiarità con i concetti spaziali;b) Capire cosa si intende per proiezione di un oggetto;c) Capire cosa si intende per rappresentazione su un foglio, cioè in forma bidimensionale, di un oggetto tridimensionale;d) Applicare i metodi di rappresentazione secondo le norme;
Tempi, spazi e metodologia didattica:	<ul style="list-style-type: none">- 30 ore, in classe e laboratorio d'informatica.- lezione frontale, rappresentazione alla lavagna.



Il metodo delle proiezioni ortogonali è quello universalmente usato per rappresentare in modo semplice, oggettivo e dimensionalmente esatto ogni oggetto, dal più piccolo al più grande. Dal più semplice al più complesso tutti i disegni esecutivi (cioè quelli che servono per dare tutte le indicazioni necessarie alla realizzazione di un oggetto) che si producono nel mondo, sono eseguiti col metodo delle proiezioni ortogonali.

Questa universale utilizzazione è dovuta a numerosi fattori legati alle peculiarità geometriche della proiezione, e cioè al fatto che tutti i raggi sono paralleli tra loro e perpendicolari al piano di proiezione (fig. 4.1).

Le proprietà delle proiezioni ortogonali sono le seguenti:

- le dimensioni di segmenti o figure piane parallele al piano di proiezione rimangono uguali nelle proiezioni (naturalmente a meno della scala di riduzione usata per il disegno);
- spigoli paralleli nell'oggetto rimangono paralleli nelle proiezioni;
- gli angoli, quando sono su piani paralleli al piano di proiezione, rimangono invariati nelle proiezioni;
- è possibile fare più proiezioni ortogonali dello stesso oggetto utilizzando più centri di proiezione e altrettanti piani di proiezione, in modo da rappresentare compiutamente e in tutte le loro parti, anche gli oggetti più complessi.

Queste prerogative fanno sì che sia possibile risalire alla forma e alle dimensioni esatte dell'oggetto partendo dalle sue proiezioni ortogonali.

Poiché si è abituati a vedere gli oggetti di scorcio o, come si suol dire di 3/4, per coglierne la loro fisionomia tridimensionale, spesso capita che la rappresentazione in proiezioni ortogonali, sempre frontale e costituita da più viste, risulti a occhi poco allenati e non tecnici astratta, poco chiara se non addirittura incomprensibile.

Per avere viste più realistiche degli oggetti bisogna ricorrere in aggiunta ad altri metodi di rappresentazione.



Nella proiezione da un punto di osservazione all'infinito, i raggi proiettanti sono tutti paralleli tra loro.

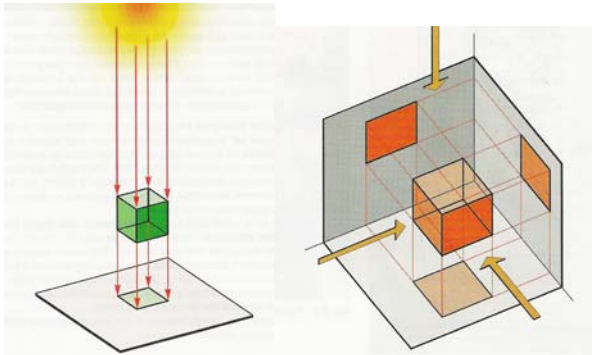


Figura 4.1 punto di proiezione all'infinito

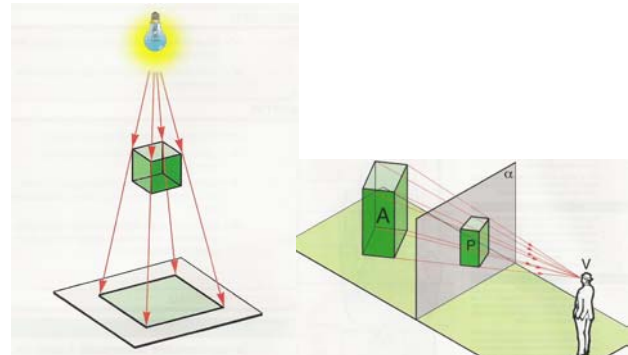


Figura 4.2 punto di proiezione al finito

La proiezione da un punto all'infinito dà origine a due metodi di rappresentazione:

1. il metodo delle **proiezioni ortogonali**, quando i raggi proiettanti sono tutti perpendicolari al piano di proiezione (fig. 4.1);
2. il metodo delle **proiezioni assonometriche**, quando i raggi proiettanti sono tutti inclinati rispetto al piano di proiezione (M3).

La proiezione da un punto all'infinito si dice anche, **proiezione cilindrica**.

Una rappresentazione completa di un oggetto è fatta con una PO e una PA. In alcuni casi, per oggetti con parti nascoste, bisogna ricorrere anche alle viste sezionate (M5)

4.1 Caratteristiche della Proiezione Ortogonale (PO)

Nella PO il quadro di rappresentazione non è unico ma ve ne sono tre che coincidono con i tre piani del triedro di riferimento. In questo caso un solido viene rappresentato con tre figure che devono essere assemblate, mentalmente, per capire la forma del solido. Le tre figure, relazionate tra loro, si dispongono in modo da essere contenute insieme ai rispettivi quadri in un solo piano o quadro q .

Quanto detto verrà esaminato facendo riferimento ad un cubo di lato l .



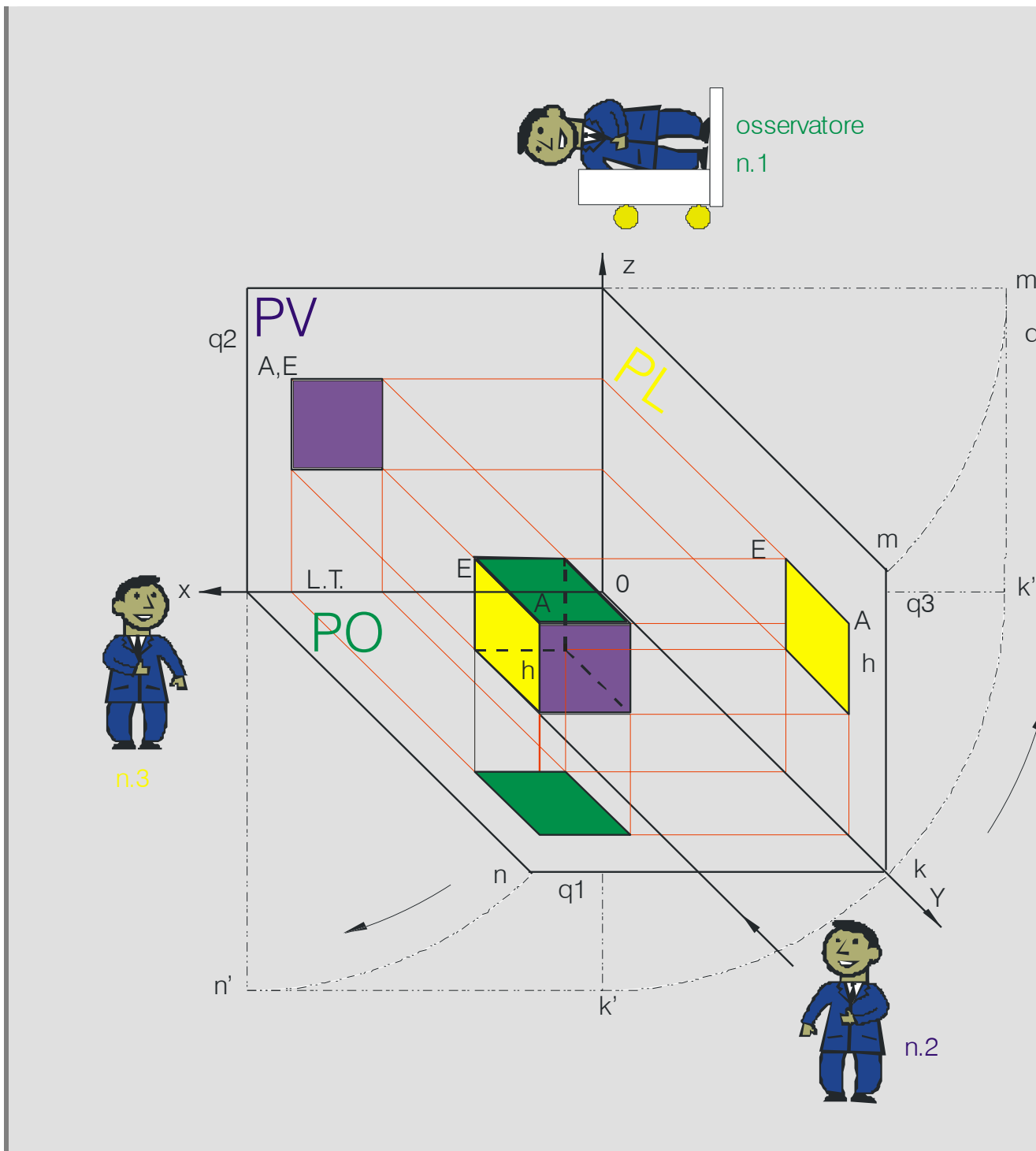


Figura 4.3 PO di un cubo

In figura 4.3 è rappresentato un triedro di riferimento avente il piano x-y che corrisponde al quadro q1, il piano x-z che corrisponde al quadro q2 e il piano y-z che corrisponde al quadro q3. su detti quadri sono state riportate le PO di un cubo.



La PO in q_1 si ottiene guardando con l'osservatore n.1, con raggi proiettanti perpendicolari a q_1 , il cubo. In modo analogo con l'osservatore n.2 e n.3. per la PV e PL su q_2 e q_3 rispettivamente.

Il sistema di riferimento del triedro costituisce una configurazione spaziale tridimensionale. Occorre riportare le viste su q_1 , q_2 e q_3 su superficie bidimensionale del foglio da disegno. Perciò si considera di far ruotare di un angolo retto, solitamente in senso orario, il quadro q_1 intorno all'asse x fino a farlo giacere sul piano q_2 . in modo analogo si apre q_3 su q_2 .

Il procedimento è simile a quello relativo all'apertura di una scatola.

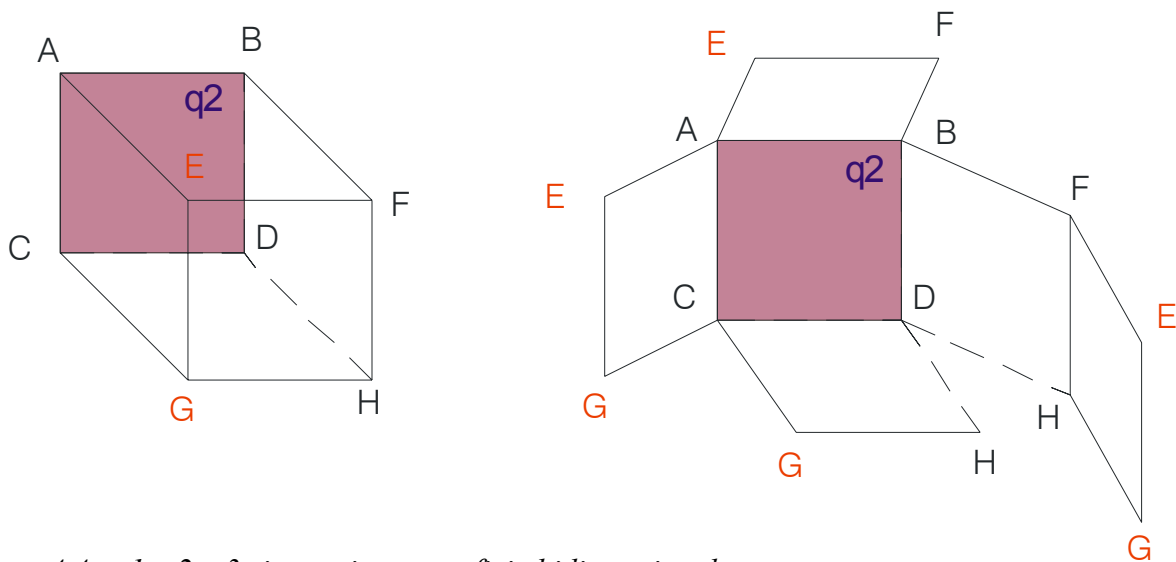


Figura 4.4 q_1 , q_2 , q_3 riportati su superficie bidimensionale

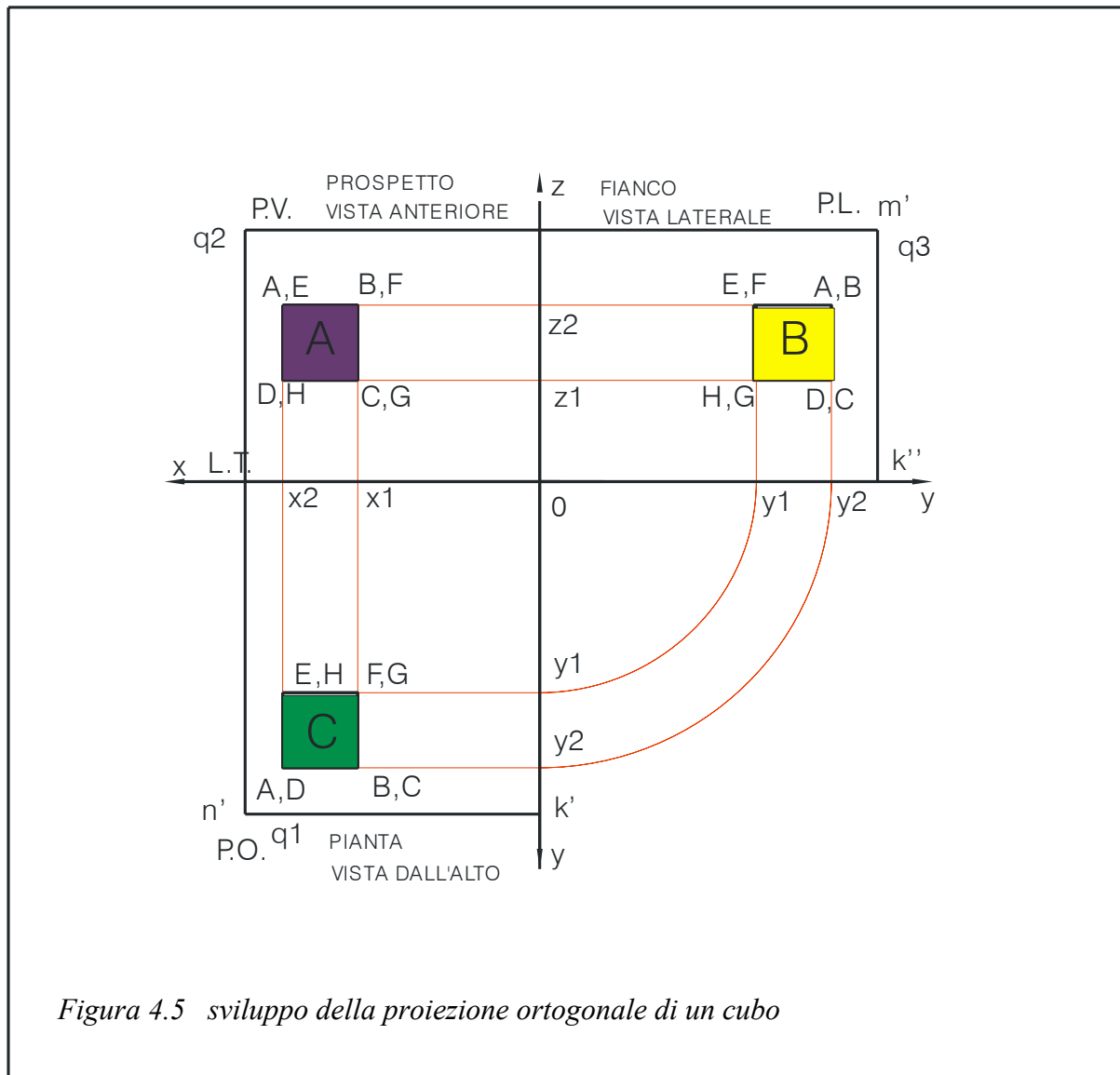
Il procedimento illustrato in figura 4.4, applicato sul triedro di figura 4.3, da origine allo sviluppo di figura 4.5.

Come si può notare la PO di un solido corrisponde alla PO dei suoi spigoli e quindi dei suoi vertici. Per questi ultimi si fanno passare i raggi proiettanti \perp , di volta in volta, ai tre piani del triedro. Sono proprio i raggi proiettanti a determinare le proiezioni sul P.V., P.O. e P.L.

Il solido nel triedro è disposto in modo da fornire, nelle viste proiettate, le sue caratteristiche geometriche nel modo più semplice e completo possibile. È arbitraria invece la posizione nello spazio del triedro e quindi per effettuare la sua proiezione ortogo-



nale occorre fissare a piacere le distanze (preso come riferimento la vista principale P.V.) tra la proiezione ortogonale in P.V. con la L.T. e l'asse z.



In figura 4.3 sono stati tracciati i raggi proiettanti, passanti per tutti i vertici del solido. I quadri sono piani indefiniti, ma sono stati considerati limitati per rendere più significativa la loro rappresentazione grafica.

Regole

1. Scrittura delle lettere poste accanto ad ogni vertice (figura 4.5): se in un punto vi sono più lettere, la prima di esse è associata al vertice più lontano dal piano di proiezione, ovvero è associata al vertice che l'osservatore incontra per pri-



mo, con il raggio visivo (vedi in figura 4.3 in q2 il punto A,E);

2. Terza vista: note due viste, la terza (non sempre univoca) si ricava dalle precedenti due, vedi figura 4.6.

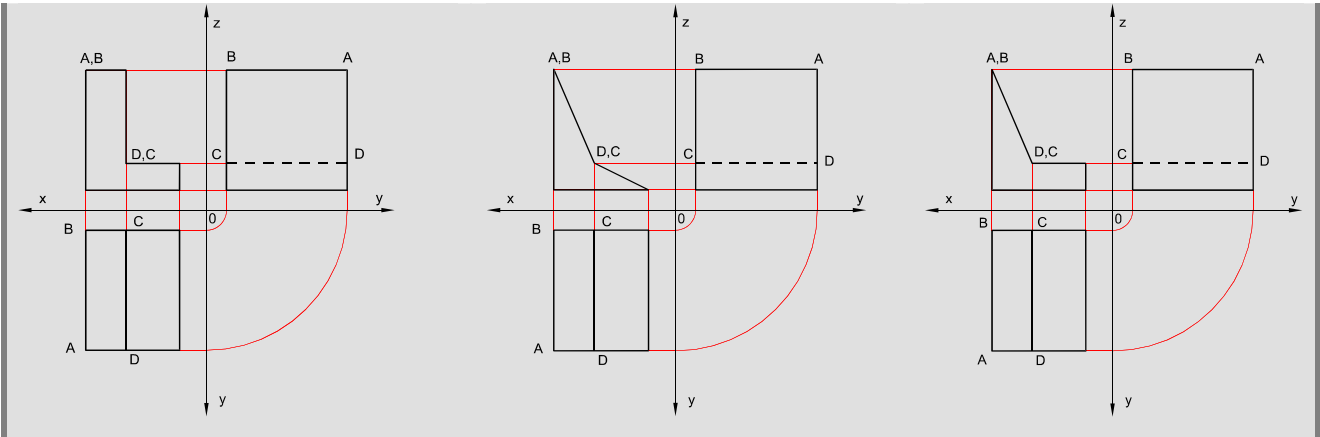


Figura 4.6 proiezione ortogonale di sagome a L

Definizioni

- Il piano x-y (quadro q1, vedi figura 4.5) viene detto *Piano Orizzontale* (P.O.) o primo piano di proiezione e la figura che vi si rappresenta viene detta pianta o vista dall'alto.
- Il piano x-z (quadro q2) viene detto *Piano Verticale* (P.V.) o secondo piano di proiezione e la figura che vi si rappresenta viene detta prospetto o vista anteriore.
- Il piano y-z (quadro q3) viene detto *Piano Laterale* (P.L.) o terzo piano di proiezione e la figura che vi si rappresenta viene detta fianco o vista laterale.
- La linea di intersezione tra il piano orizzontale e il piano verticale viene detta *Linea di Terra* (L.T.)

Ogni figura rappresenta in PO due sole dimensioni.



Scheda di approfondimento

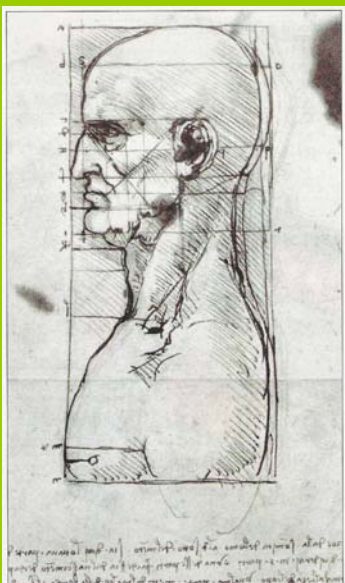
Cenni storici

Sono numerosi gli esempi di planimetrie, viste frontali e viste laterali di edifici già in epoca medioevale e rinascimentale; il concetto di rappresentazione era quindi già presente negli architetti e nei tecnici di allora: nel 1637 il filosofo-scienziato René Descartes (1596-1650), più noto come Cartesio, aveva espresso il "metodo delle coordinate", e l'architetto e matematico Girard Desargues (1593-1661) aveva enunciato i "Principi della geometria descrittiva".

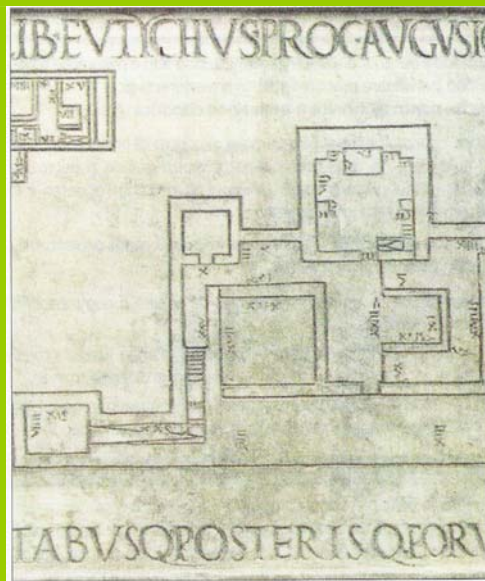
Ma per arrivare alla teorizzazione e alla formalizzazione di regole precise per la rappresentazione scientifica degli oggetti si deve giungere alla seconda metà del 700, con l'opera del matematico francese Gaspard Monge (1746-1818), che collaborò alla sezione matematica dell'Encyclopédie di D'Alembert e Diderot, con la sua geometria descrittiva, che sintetizzò e sistemò le esperienze fino a quel momento maturate.

Le prime pubblicazioni del così detto metodo della doppia proiezione ortogonale o **metodo di Monge** sono del 1766/67, ma la loro divulgazione ufficiale si ebbe nel 1798 quando vennero rese pubbliche le lezioni tenute dal Monge alle Ecoles Normales di Parigi. Secondo le teorie di Monge, per rappresentare un corpo solido era necessario proiettarlo su due piani ortogonali secondo direzioni a essi perpendicolari da punti posti all'infinito.

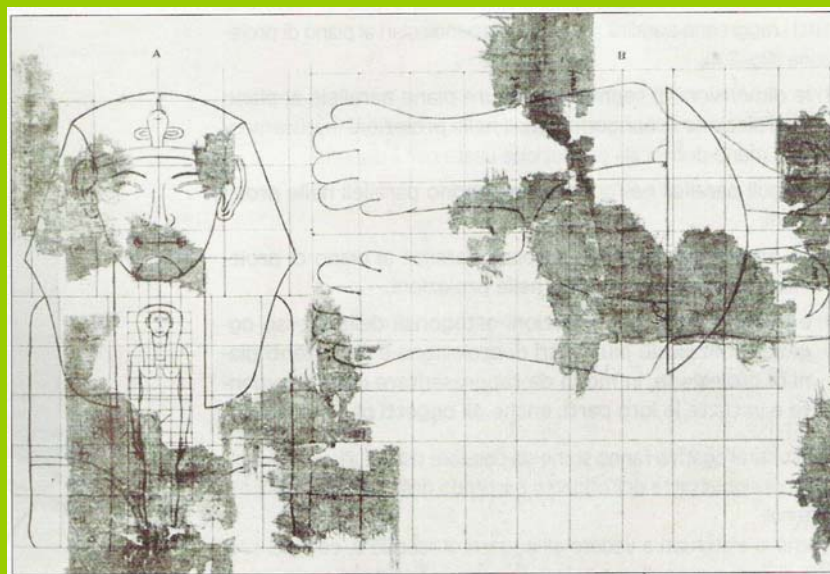
Oggi si usano talvolta molti più di due piani, ma il principio teorico è rimasto esattamente invariato



Proporzioni del volto umano. –
Leonardo da Vinci (1452-1519).



Disegno di pianta di edifici
di epoca romana, inciso
su lastra di marmo - I se-
colo a.C.



Papiro egizio con progetto di sfinge. - Età tolemeica (dal IV sec. A.C.).



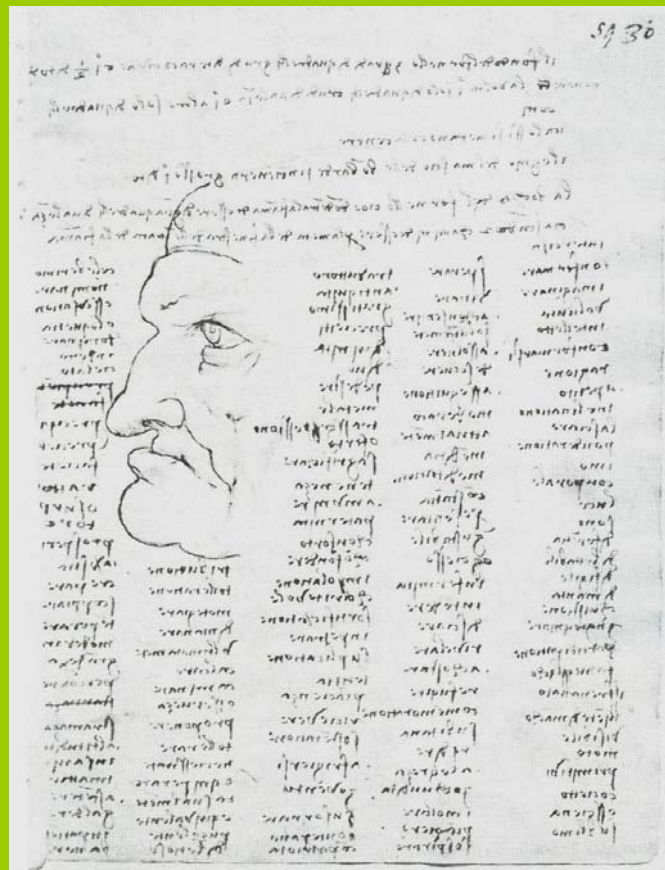
Il disegno attraverso la storia

La concezione grafica di Leonardo viene superata da Michelangelo attraverso una metodologia basata non sulla concezione scientifica, ma anche sull'aspetto creativo del disegno (qui sulla destra è riportata una parte del *trattato di Leonardo*). Fino al '700 il disegno mantiene quasi esclusivamente connotazioni pittoriche. Solo al volgere di questo ultimo secolo, grazie alla rivoluzione industriale, il disegno acquista l'esigenza di una rigorosa interpretazione della realtà. Incomincia ad emergere un disegno che indirizza il linguaggio grafico verso una codificazione rigorosa di rappresentazione. All'inizio del 800 viene a costituirsi una netta frattura tra le arti figurative; da una parte il disegno artistico come mezzo espressivo dalle ampie libertà grafiche e tecniche, dall'altra il disegno tecnico contraddistinto da un linguaggio rigoroso, e come tale regolato da norme e criteri tali da garantire un'unica interpretazione da parte di tutti gli operatori del sistema produttivo.

Questa scissione avviene grazie ad un matematico francese, Gaspard Monge, che codifica il linguaggio delle proiezioni ortogonali. Esso permette di rappresentare sul piano le tre dimensioni di ogni volume reale. Il contributo dell'inglese William Farish è stato anche notevole, infatti egli dimostra l'efficacia dell'utilizzo della rappresentazione assonometrica per far comprendere i disegni anche a persone non esperte.

Quindi nel nostro secolo si è evidenziata una netta separazione tra:

- Disegno artistico, inteso come veicolo creativo autonomo;
- Disegno tecnico, espressione della creatività alle dipendenze della tecnica.



4.2 METODI per la disposizione delle viste (rif. UNI ISO 5456-2)

Come visto in figura 4.5, per un solido non particolarmente complesso, risultano soddisfacenti solo tre viste. Per un solido particolarmente semplice bastano anche solo due viste.

In tutti gli altri casi si può ricorrere alla **PO completa**, la quale prevede la PO del solido in un doppio triedro e quindi la rappresentazione di 6 diverse viste.

Ogni piano di proiezione corrisponde ad una diversa faccia del solido (nel caso di figura 4.4 corrisponde ad una diversa faccia del cubo).

Una volta stabilito il numero di viste necessarie ad una rappresentazione ben definita del solido da proiettare, si sceglie il metodo di proiezione.

Metodo delle facce (F)

Si considera un'assonometria e si indicano delle frecce su di essa a figurare la posizione dell'osservatore. Si rappresentano le PO delle frecce così poste.

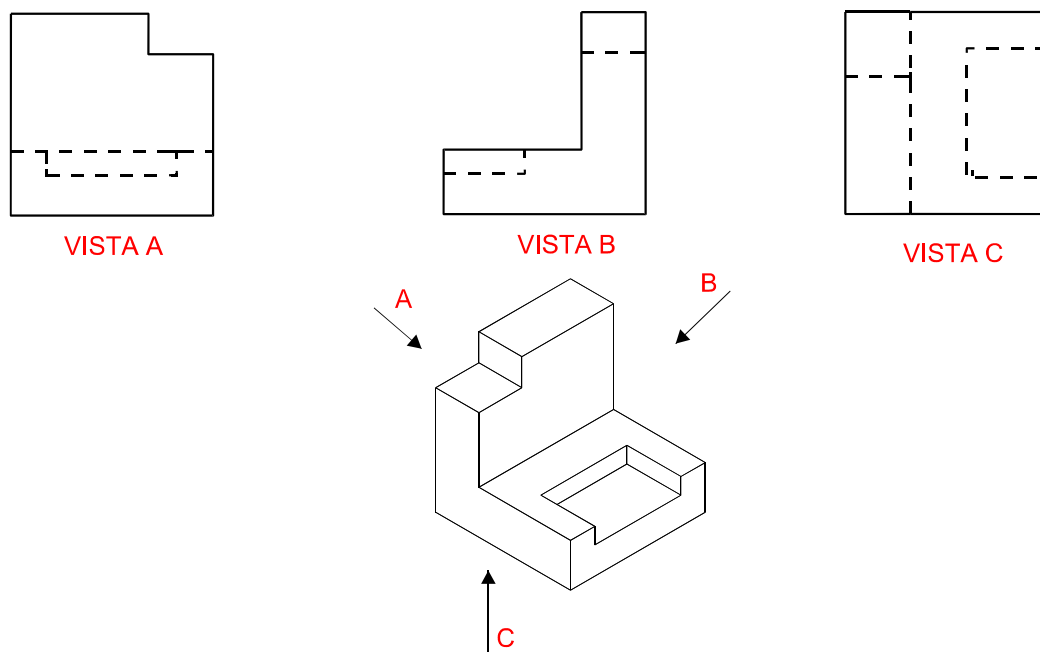


Figura 4.7 metodo delle facce

Questo metodo può essere esteso a tutti quei casi in cui è necessario mettere in vista solo alcune parti dell'oggetto che si sta rappresentando.



Le lettere maiuscole contrassegnanti le viste devono essere poste immediatamente sopra o immediatamente sotto alla vista relativa.

Questo metodo di disposizione delle viste è sempre utilizzato nei disegni edili che, essendo generalmente molto ingombranti, devono poter essere impaginati in fogli di formato allungato e disposti uno di seguito all'altro.

Metodo americano o del terzo triedro (A)

È un metodo usato soprattutto in America. Ha un simbolo distintivo che deve essere sempre riportato sui disegni tecnici in uno spazio apposito del riquadro delle iscrizioni. In figura 4.8 è rappresentato in PO completa.

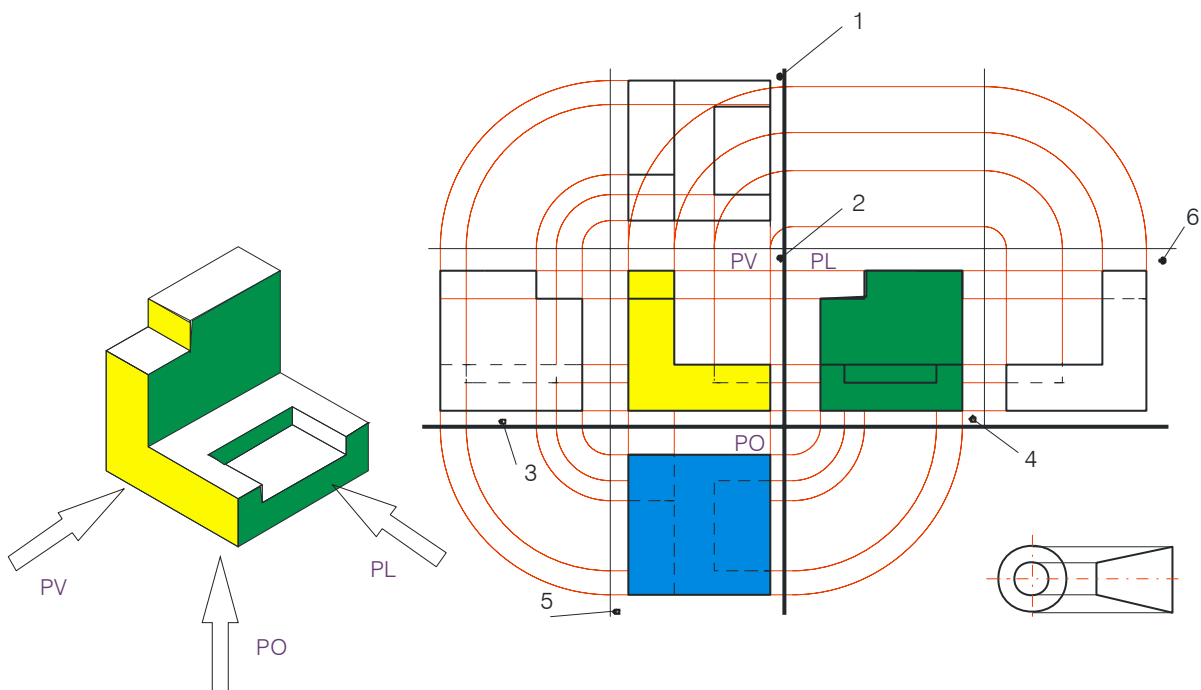


Figura 4.8 metodo americano con relativo simbolo

Le viste adottate sono le seguenti: 1) vista dall'alto; 2) **vista anteriore (vista principale), P.V.**; 3) vista laterale sinistra; 4) **vista laterale destra P.L.**; 5) **vista dal basso, P.O.**; 6) vista posteriore. Le viste principali sono la vista 2, 4, 5.



Metodo europeo o del primo triedro (E)

È il metodo usato in Europa e quindi considerato nelle diverse applicazioni di questo testo. Ha un simbolo distintivo che deve essere sempre riportato sui disegni tecnici in uno spazio apposito del riquadro delle iscrizioni. In figura 4.9 è rappresentato in PO completa.

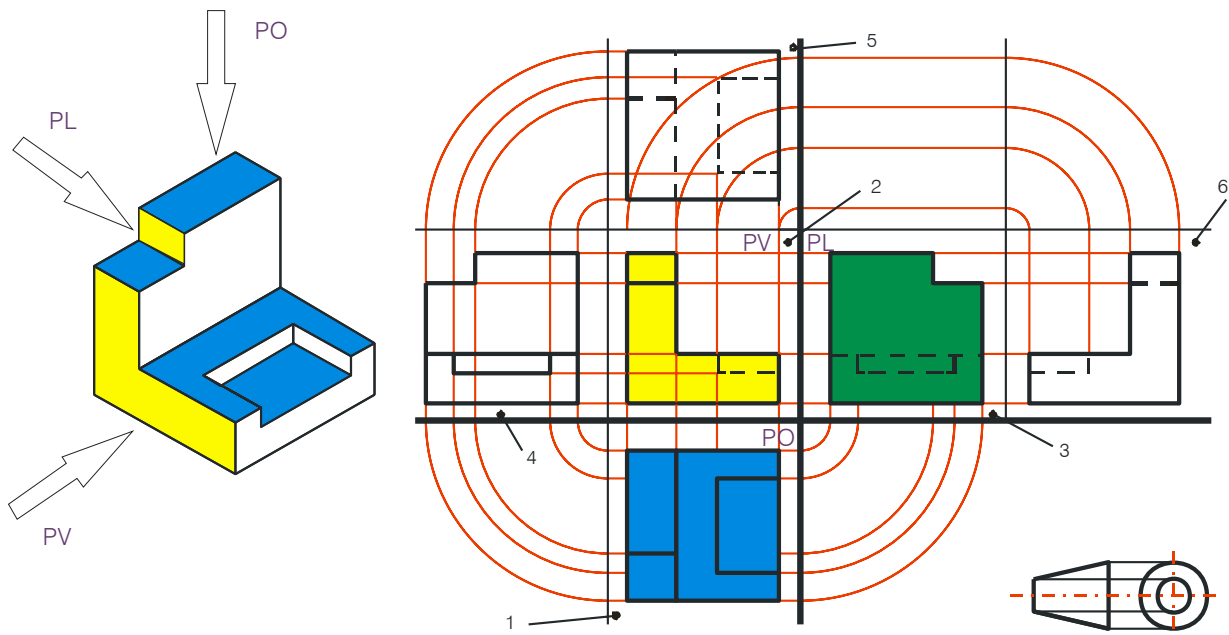


Figura 4.9 metodo europeo con relativo simbolo

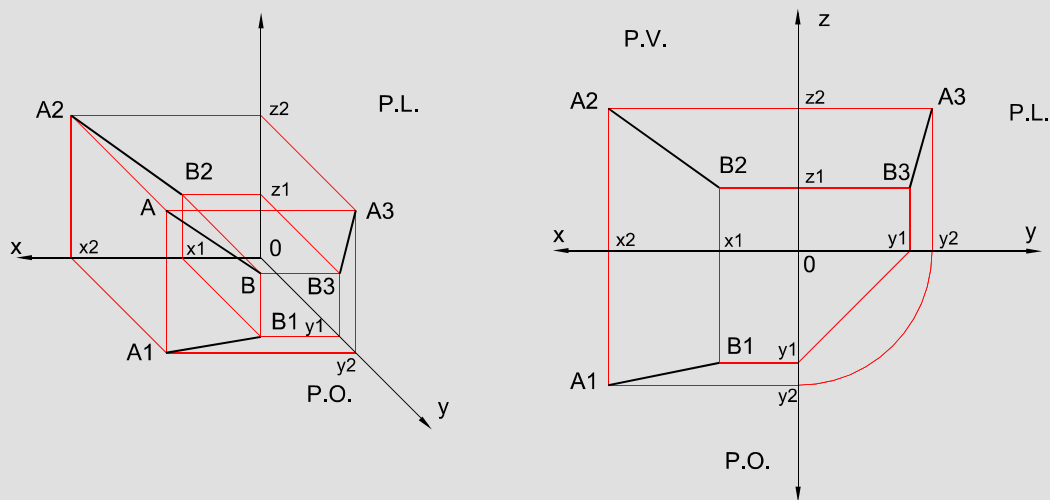
Le viste adottate sono le seguenti: **1) vista dall'alto, P.O.;** **2) vista anteriore (vista principale), P.V.;** **3) vista laterale sinistra, P.L.;** 4) vista laterale destra; 5) vista dal basso; 6) vista posteriore. Le viste principali sono la vista 1,2,3

Confrontando le figure 4.8 e 4.9, da un metodo all'altro cambia la posizione delle viste ad eccezione delle viste 2 e 6 (la vista sul P.V. rimane la stessa per entrambi i metodi!).



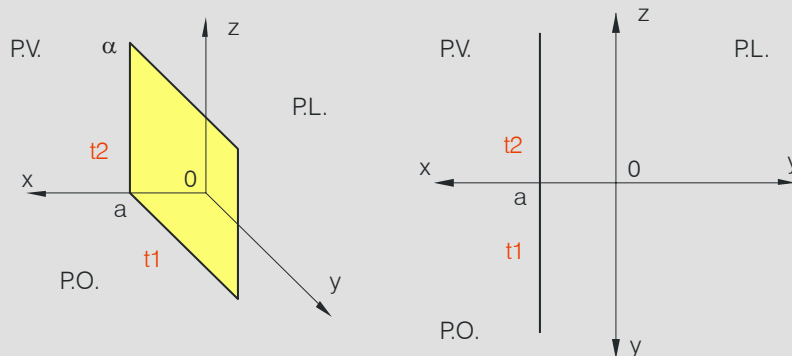
4.3 PO di figure semplici

PO di un segmento.



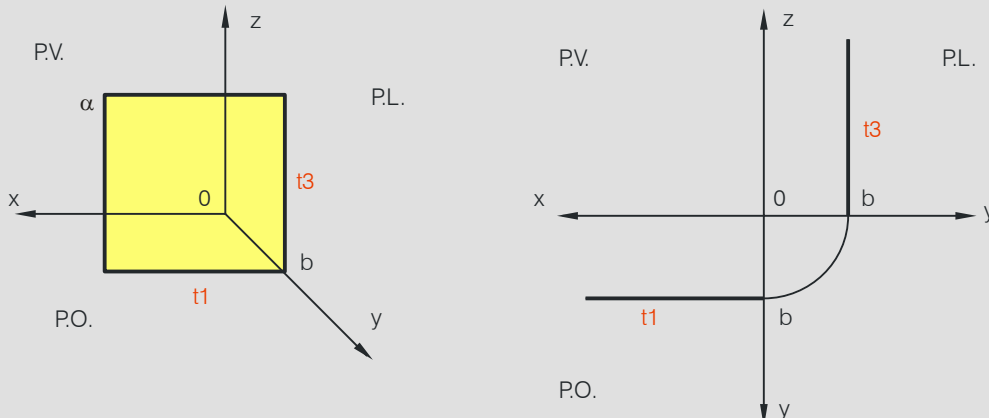
Il segmento \overline{AB} è inclinato rispetto ai piani (P.V., P.O., P.L.) \Rightarrow nessuna delle sue proiezioni è in vera grandezza. \overline{AB} come oggetto di struttura semplice, può essere rappresentato da due sole viste; in questi casi la terza vista serve per un'ulteriore chiarificazione.

PO di un piano α // al P.L.

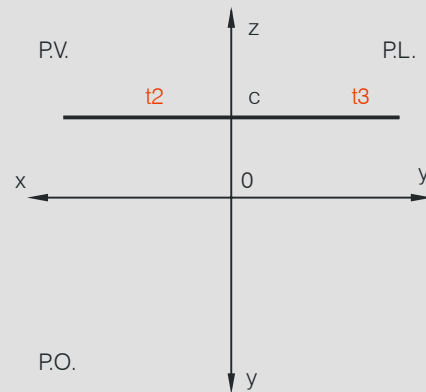
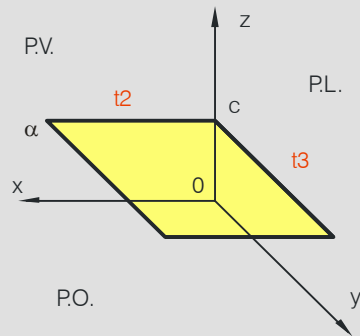


Per semplicità si considera il piano α limitato e le sue tracce con linea continua t1 e t2.

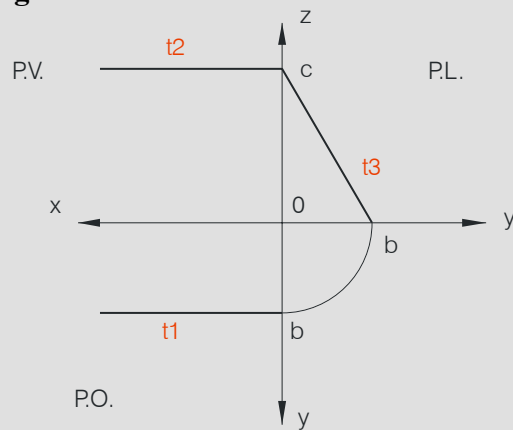
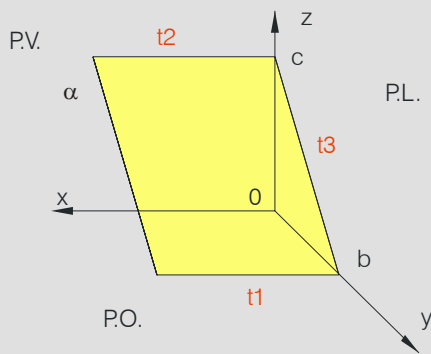
PO di un piano α // al P.V.



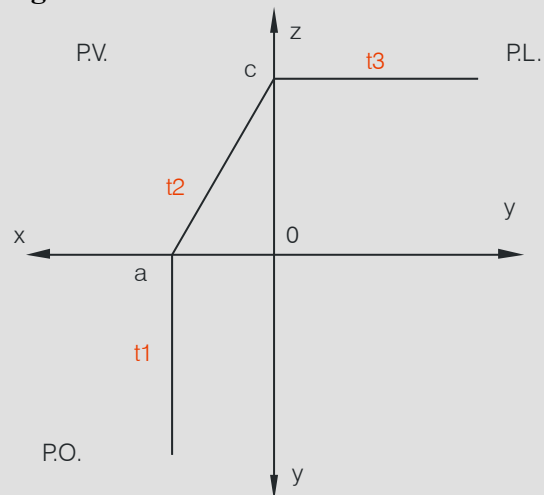
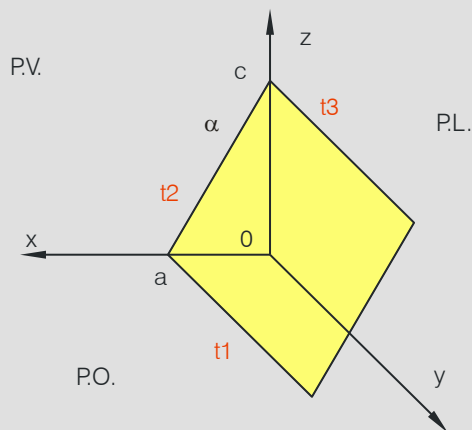
PO di un piano α // al P.O.



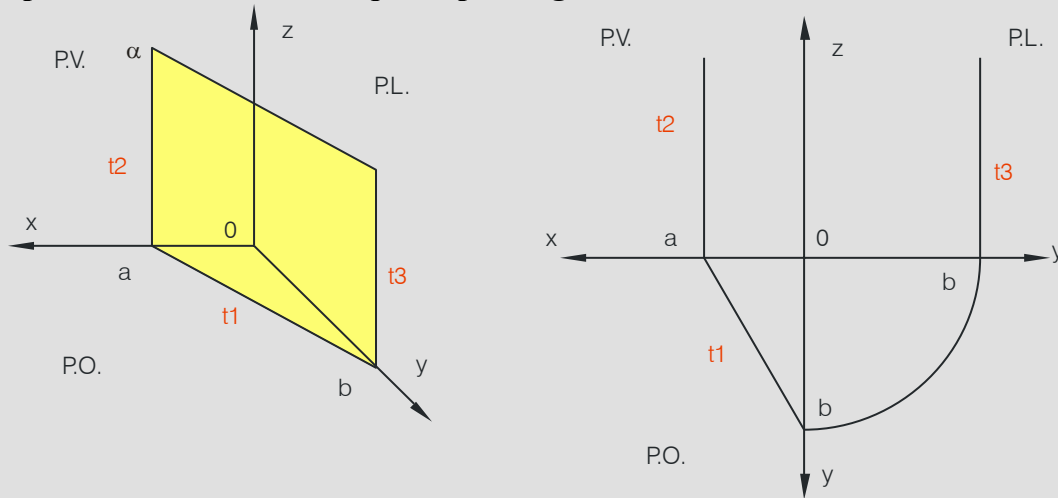
PO di un piano α \perp al P.L. e obliquo rispetto agli altri due.



PO di un piano α \perp al P.V. e obliquo rispetto agli altri due.



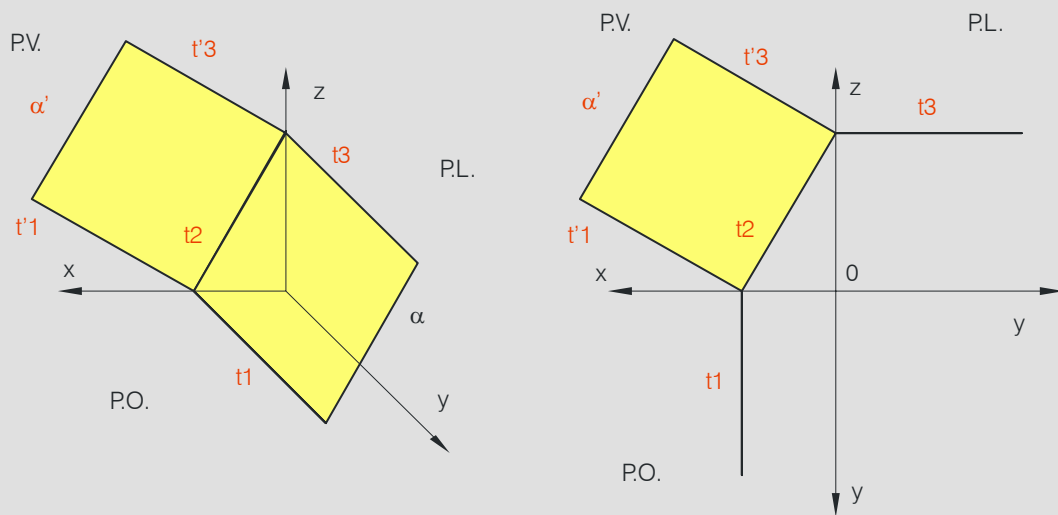
PO di un piano $\alpha \perp$ al P.O. e obliquo rispetto agli altri due.

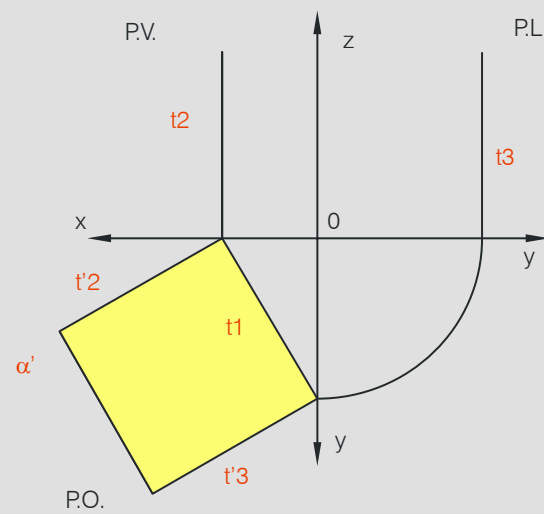
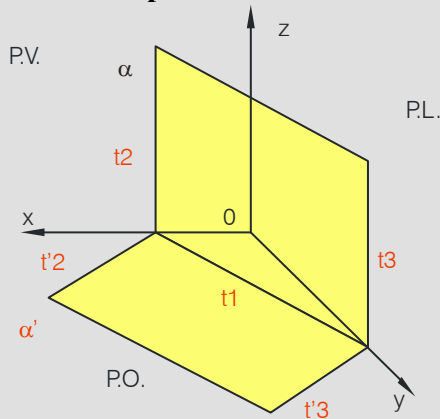
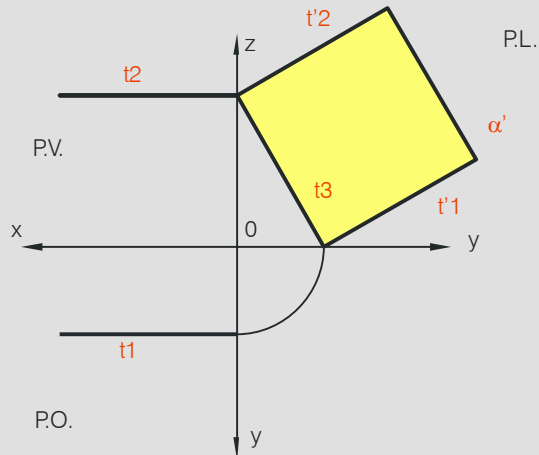
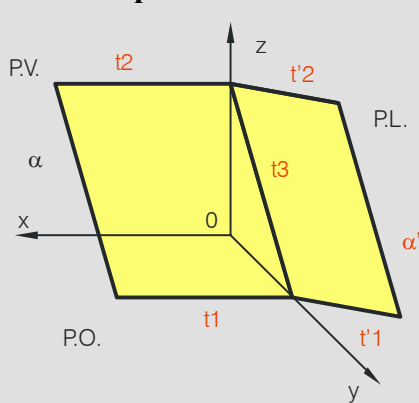


4.4 Ribaltamento di un piano

Quando un segmento o uno spigolo non sono paralleli ad alcun piano del triedro, le loro proporzioni sono deformate e in particolare sono più piccole del reale. La determinazione della vera lunghezza (argomento richiamato in seguito) si ricorre alla tecnica del ribaltamento del piano. Ribaltiamo i piani obliqui dei precedenti tre casi.

Ribaltamento di un piano α sul P.V.



Ribaltamento di un piano α sul P.O.**Ribaltamento di un piano α sul P.L.**

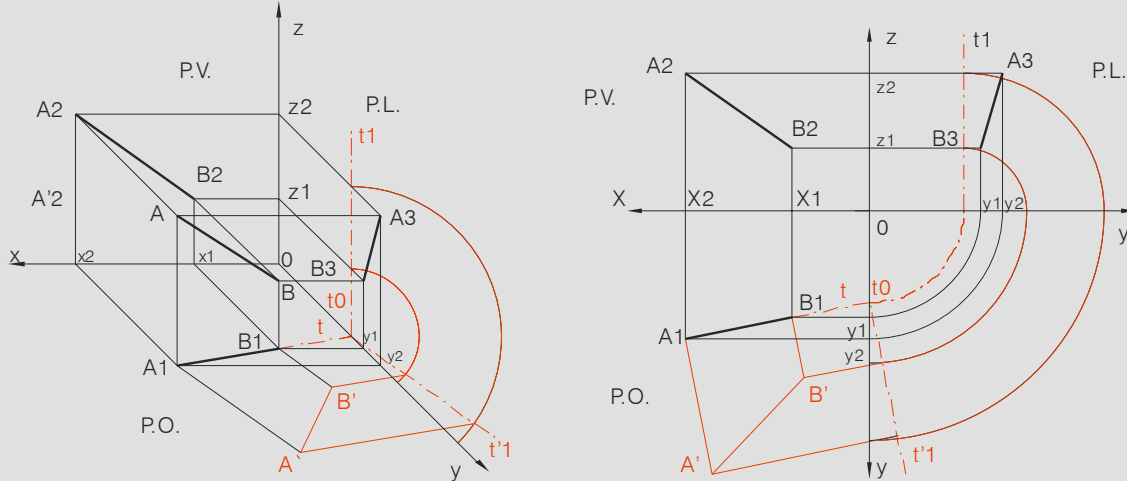
Questa tecnica si applica ad ogni spigolo per la ricerca della vera lunghezza. Infatti basta immaginarlo sul piano da ribaltare e ribaltarlo insieme ad esso in modo da renderlo complanare al piano di proiezione. Il piano ribaltato si chiamerà *piano ausiliario* e su di esso giacerà lo spigolo con vera lunghezza.

Applichiamo questa teoria!|



4.5 Metodo del RIBALTAMENTO per la ricerca della vera grandezza (o forma)

PO di un segmento (\overline{AB}) con vera grandezza.



Si prende in considerazione il piano che contiene il segmento e una sua proiezione (è il piano di tracce $t-t_1$) e ribaltarlo in modo da renderlo complanare al piano di proiezione (su P.O. diventa il piano $t-t'_1$). Il segmento di vera grandezza è $\overline{A'B'}$.

PO di un triangolo isoscele con vera forma.

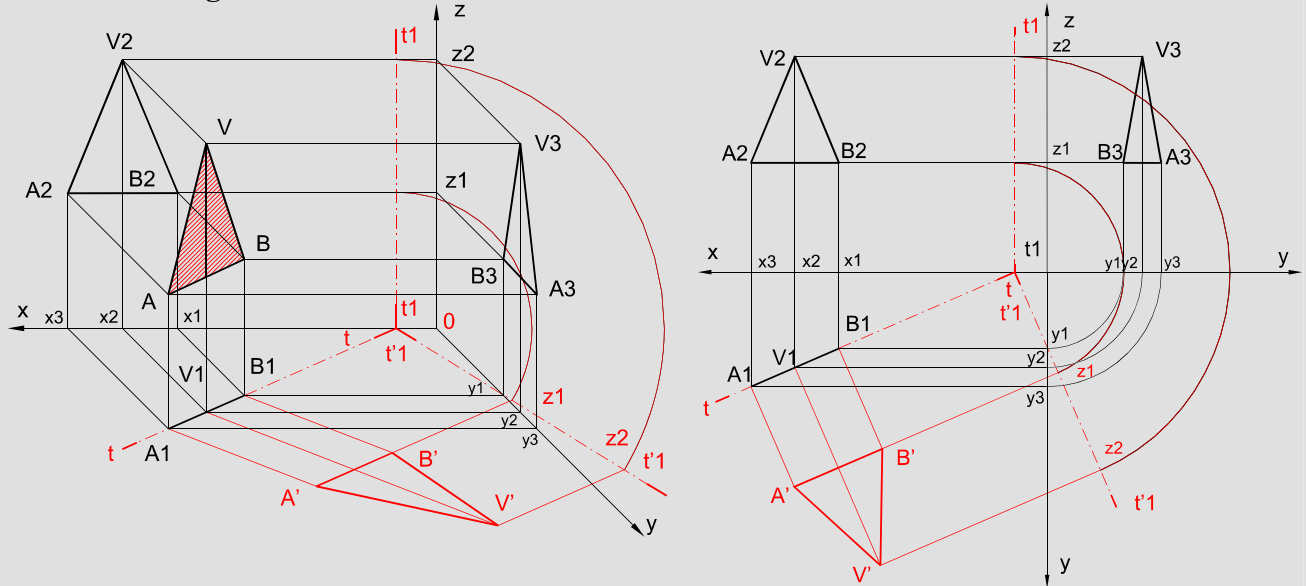
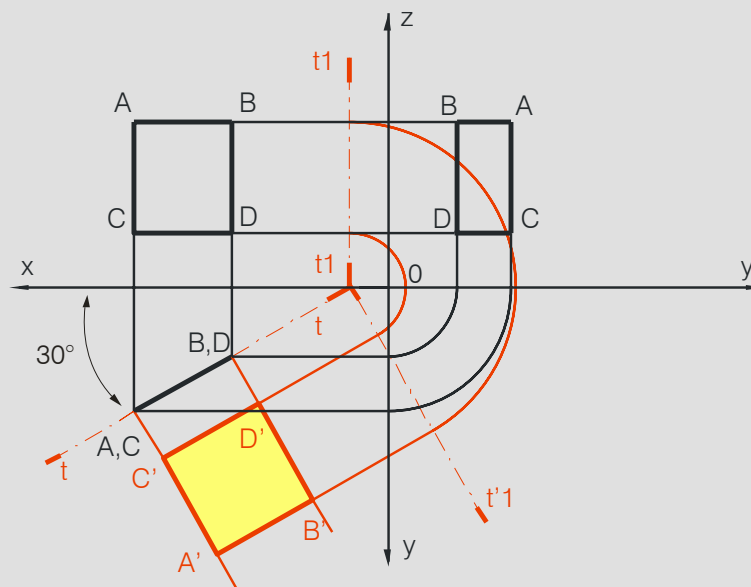


Figura del triedro di riferimento utilizzata per meglio comprendere le considerazioni sulla Proiezione Ortogonale. Nelle esercitazioni si può omettere!

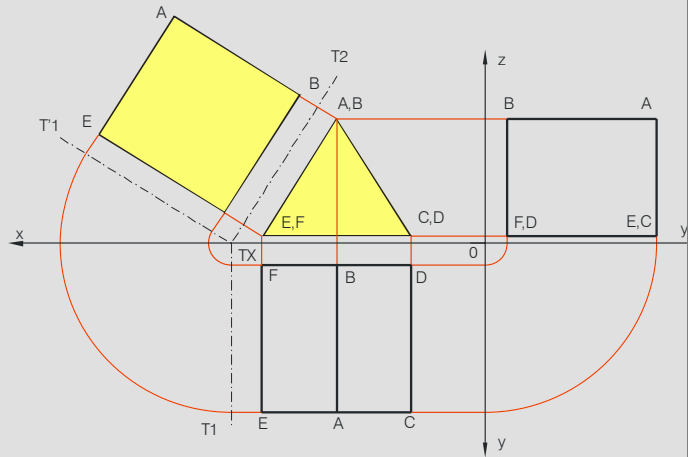
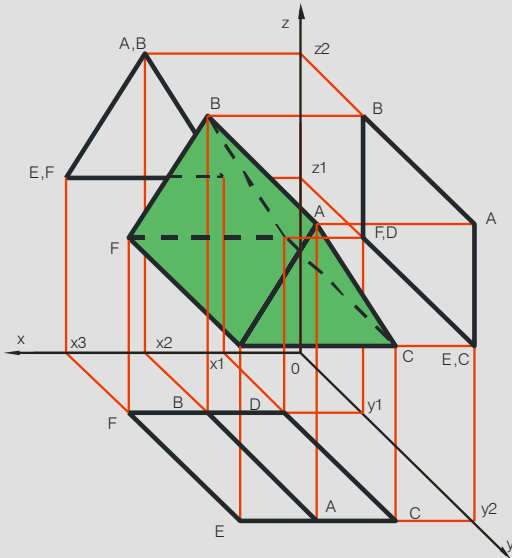


PO di un quadrato con vera grandezza.**4.6 Vera grandezza di un solido**

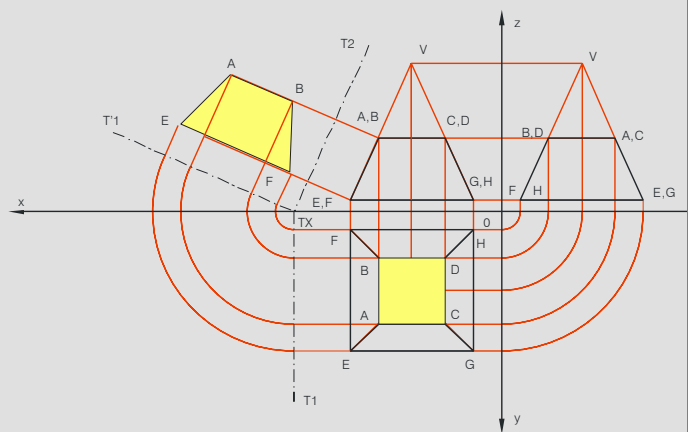
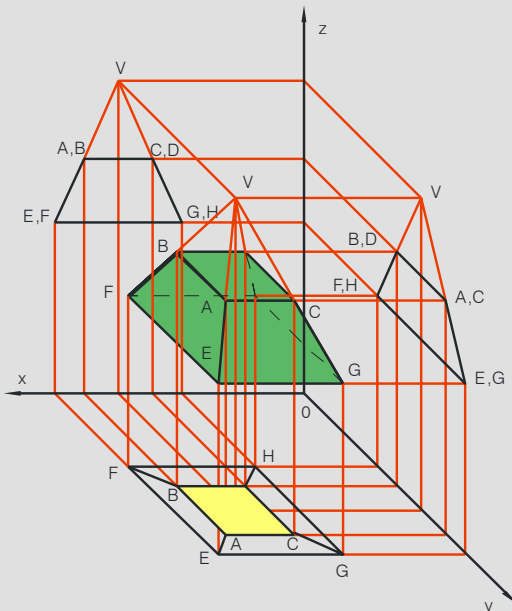
Il procedimento della determinazione della vera grandezza di una figura piana si può applicare alle facce dei solidi che non sono parallele ai piani di proiezione, procedendo nel seguente modo: si individua la faccia inclinata rispetto al piano di proiezione e si considera un piano parallelo a detta faccia (detto *piano ausiliario*) e su di esso si effettua la proiezione ortogonale; infine si ribalta detto piano fino a renderlo complanare con il piano di proiezione. Procediamo per esempi.



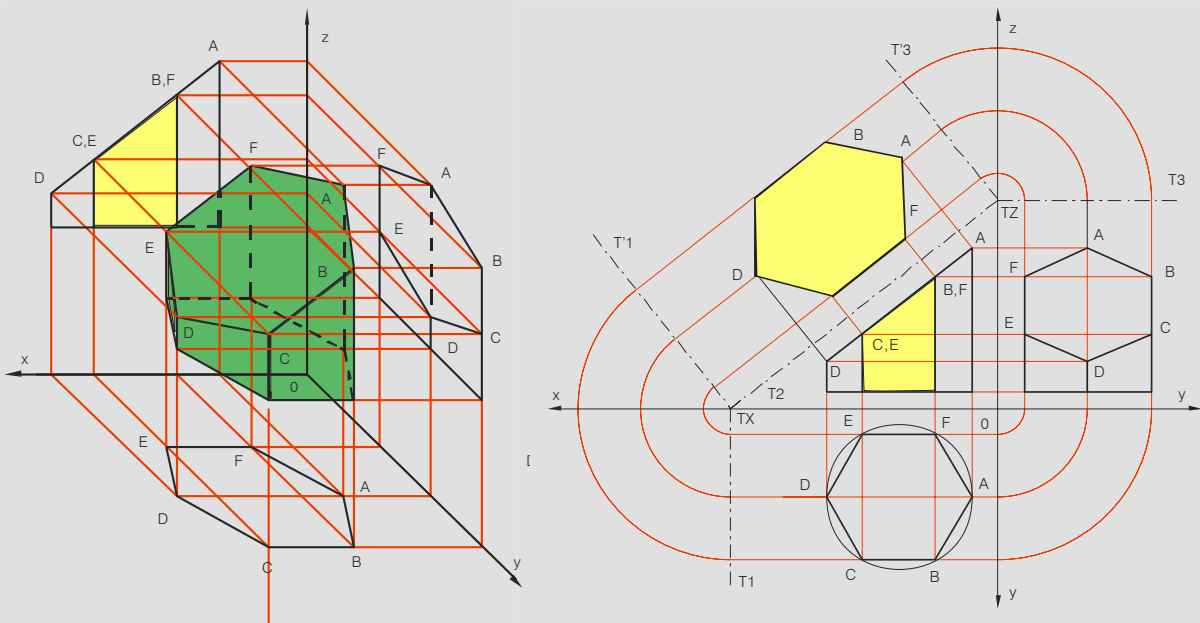
PO di un prisma retto a base triangolare e vera grandezza di una sua faccia con piano ausiliario. NB: Le facce colorate in giallo chiaro hanno vera forma (forma e grandezza sono usati come sinonimi)!



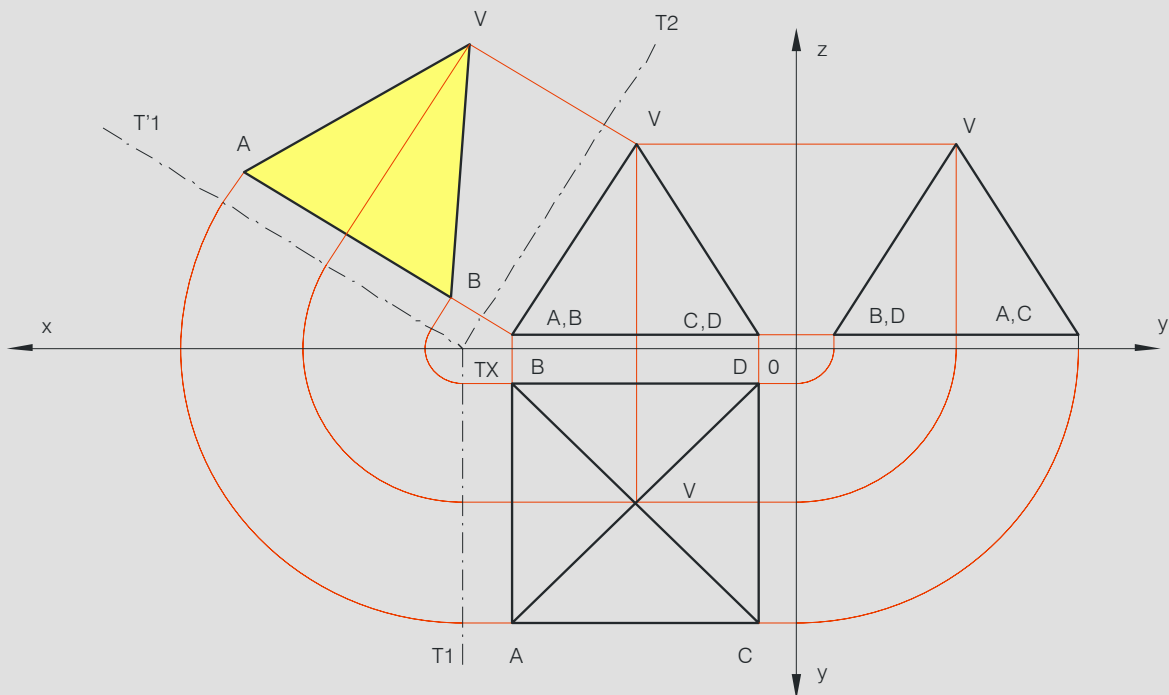
PO di un tronco di piramide retta a base quadrata e vera grandezza di una sua faccia.



PO di un tronco retto di prisma a base esagonale regolare e vera forma di una sua faccia.



PO di una piramide retta a base quadrata e vera grandezza di una sua faccia.



4.7 Metodo delle proiezioni successive

Nel caso di un solido avente l'asse inclinato rispetto a tutti e tre i piani di proiezione bisogna ricorrere, per individuare PO e vera vista, ad un particolare metodo di proiezione detto: *Metodo delle proiezioni successive*.

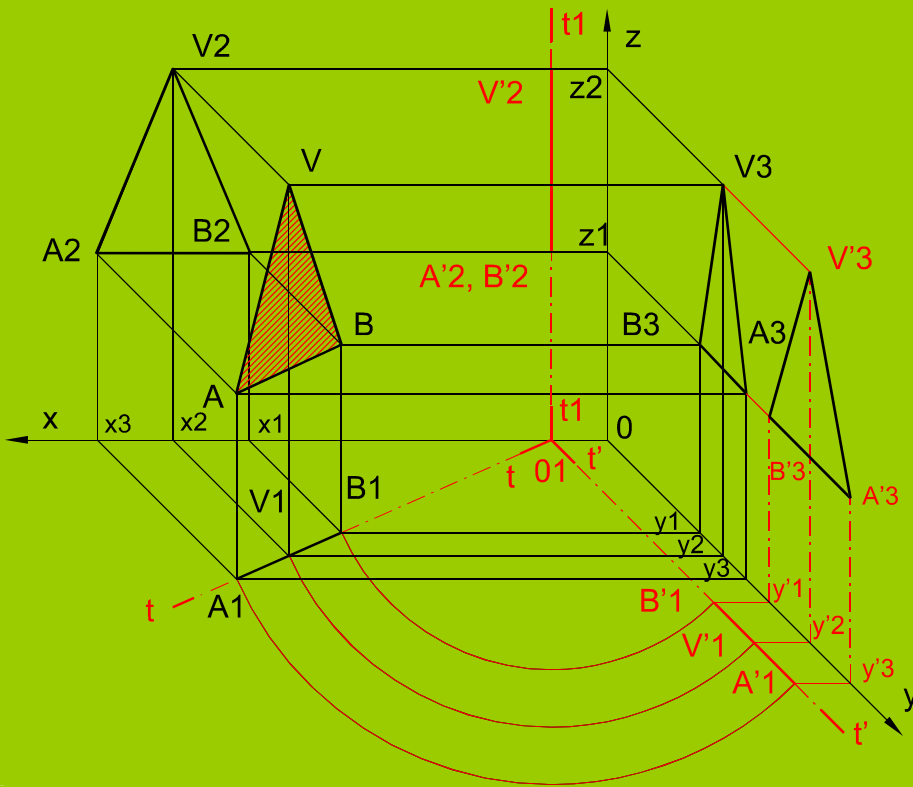
In questo caso per tracciare -----straneo consorti pag 210

PO di un parallelepipedo inclinato rispetto alla L.T. di un angolo β

Inserire figure 7.11; 7.12; 7.13 da pag. 153



Scheda di approfondimento

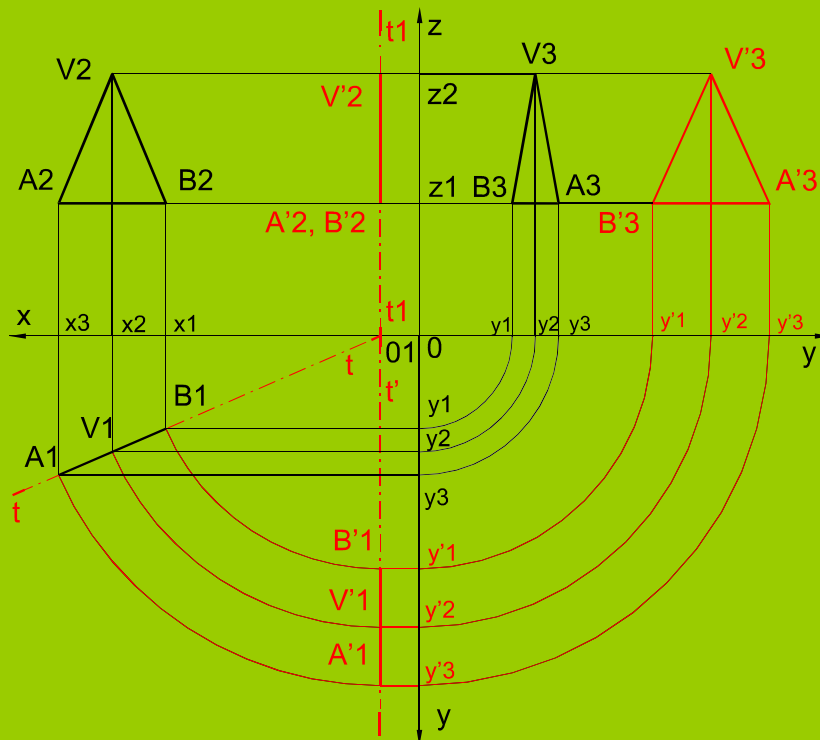


Metodo della rotazione

Per la ricerca della vera grandezza o forma, oltre al metodo del ribaltamento del piano, vi è anche il metodo della rotazione. Si consideri la PO del triangolo qui al lato:

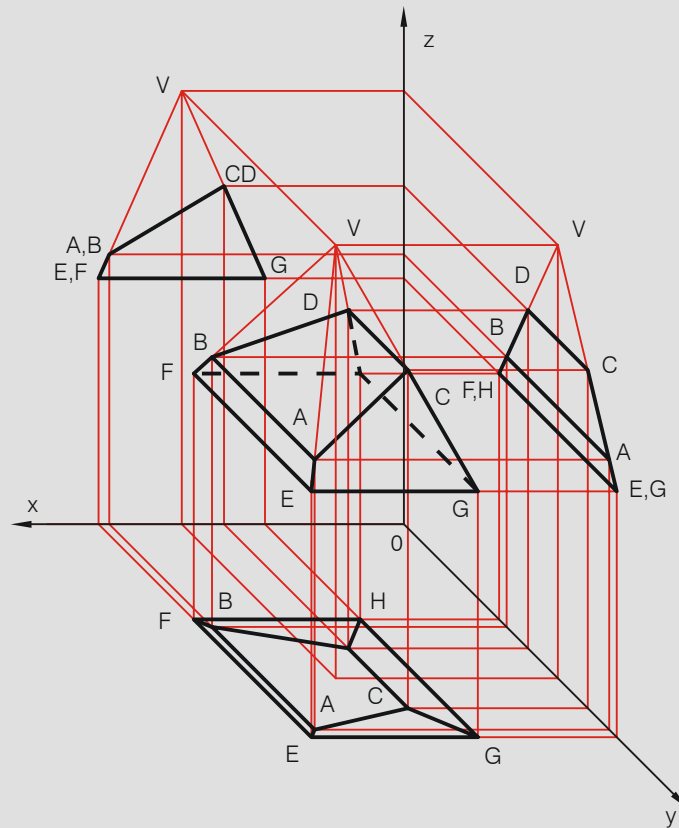
Si fa ruotare il piano di tracce $t-t_1$ attorno alla traccia t_1 fino a renderlo parallelo al piano laterale (tracce $t'-t_1$) sul quale si determina la vera grandezza.

Disposta su piano la PO con vera vista è indicata nella figura sottostante!



4.8 Esercitazioni libere

Ricavare la PO del tronco di piramide e la vera grandezza della sezione (superficie ABCD).



es1

Inserire gli esercizi da pag. 160

+

Fare richiamo con ASSONOMETRIE per far ricavare le relative PO

